Kapitel 6

Die Taylorreihe einer Funktion

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit Taylorreihen, Taylorpolynomen und der Restgliedabschätzung für Taylorpolynome.

Die *Taylorreihe* einer reellen Funktion ist eine spezielle Potenzreihe, die sich recht leicht aus den Ableitungen der Funktion berechnen lässt. Unter bestimmten Voraussetzungen ist die berechnete Taylorreihe identisch mit der gegebenen Funktion. Dies macht Taylorreihen zu einem äußerst wichtigen mathematischen Hilfsmittel im Umgang mit Funktionen, sie sind sowohl beim Modellieren von Problemen als auch beim Lösen von Gleichungen äußerst Hilfreich.

Taylorpolynome, die "endliche Version" und quasi der "kleine Bruder" der Taylorreihe, werden häufig als Approximation für Funktionen benutzt: Wenn das Rechnen mit der tatsächlichen Funktion nicht oder nur schwer möglich ist, bietet ein Taylorpolynom eine leicht handhabbare Approximation der Funktion – mit einer Gütegarantie.

6.1 Voraussetzungen

Im folgenden benötigen wir die folgenden Namenskonventionen:

Für ganze Zahlen $n \in \mathbb{N}$ ist **die Fakultät** $n!$ das Produkt aller ganzen Zahlen bis zu n:

$$\begin{aligned} n! &:= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-1) \cdot n \\ 4! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \end{aligned}$$

Als besondere Definition setzt man:

$$0! := 1$$

Ein Monom hat die Form $a \cdot x^k$.

Hierbei ist

- x die *Variable*
- $k \in \mathbb{N}$ der ganzzahlige *Exponent*
- $a \in \mathbb{R}$ der reelle *Koeffizient*

Null als Exponent:

Für alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^0 = 1$ (wieso dies so ist: s. Seite 15)

6.1.1 Potenzreihen

Potenzreihen sind zum einen Funktionen, d.h. zu einer Variable x wird ein Funktionswert errechnet. Gleichzeitig ist jede Potenzreihe eine *Reihe*, also die Summe unendlich vieler Summanden, nämich die Summe *unendlich vieler* Monome $a_n x^n$.
Entsprechend ist beim Umgang mit Potenzreihen Vorsicht geboten: Nicht immer ergibt sich beim Einsetzen von Werten für x ein sinnvoller Wert (s. Beispiel 6.2).

Die **allgemeine Form einer Potenzreihe** lautet

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-m)^k = a_0 + a_1(x-m)^1 + a_2(x-m)^2 + a_3(x-m)^3 + \dots$$

- Hier ist "x" die *Variable*, für die spezielle Werte eingesetzt werden können.
- Die Zahl "m" nennt man den *Mittelpunkt* der Potenzreihe.
- Die **reellen** Zahlen $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ heißen die *Koeffizienten* der Potenzreihe f.

Beispiel 6.1 Die Reihe

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, x^k}_{\text{Summen-Schreibweise}} \quad = \quad \underbrace{\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots}_{\text{Pünktchen-Schreibweise}}$$

nennt man die *Eulersche Funktion* oder auch e-Funktion, abgekürzt e^x.

- Hier ist der Mittelpunkt $m = 0$ und
- die allgemeine Formel für die Koeffizenten lautet $a_k = \frac{1}{k!}$.

6.1.2 Einsetzen von Zahlen in Potenzreihen

Das Auswerten einer Potenzreihe $f(x)$ muss nicht immer "gut gehen": Es kann Werte für x geben, für die $f(x)$ beliebig groß wird:

Beispiel 6.2 Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot x^k \quad = \quad 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \cdots$$

kann für $x = 1$ keinen endlichen Wert annehmen, weil eine Summe von unendlich vielen Einsen größer sein muß als jede bekannte Zahl. Man sagt entsprechend "diese Potenzreihe divergiert am Punkt $x = 1$". Setzt man jedoch $\frac{1}{2}$ für x ein, so ergibt sich der Wert 2:

$$\begin{array}{lcll} \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot (1)^k & = & 1 + 1^1 + 1^2 + 1^3 + \cdots & = \infty \\ \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot (\frac{1}{2})^k & = & 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots & = 2 \end{array}$$

Für weitergehende Informationen über das Konvergenzverhalten von Reihen, insbesondere über den sogenannten *Konvergenzradius*, empfehlen wir einen Blick in die entsprechende Literatur.

6.2 Die Taylorreihe einer Funktion

Die Taylorreihe einer Funktion f ist eine spezielle Potenzreihe, die sich recht leicht aus den Ableitungen von f berechnen lässt. Die Taylorreihe stimmt unter bestimmten Umständen(!) rund um den *Entwicklungspunkt* mit der gegebenen Funktion überein.
Entsprechend benutzt man die Taylorreihe (bzw. das Taylorpolynom) einer Funktion häufig in komplexeren Rechnungen, weil sich mit ihr häufig leichter rechnen lässt als mit der eigentlichen Funktion selbst. Ein Taschenrechner verwendet beispielsweise zum Berechnen (d.h. eigentlich: zum Annähern) von Wurzelausdrücken ein Taylorpolynom der Funktion $\sqrt{(x)}$.

Der anstrengende und fehleranfällige Teil der Berechnung einer Taylorreihe ist das Bilden der zahlreichen benötigten Ableitungen. Hierzu verwendet man heute meistens spezielle Software.

6.2.1 Die allgemeine Form der Taylorreihe:

In der nachfolgenden Definition ist $f^{(k)}(m)$ die k-te Ableitung von f an der Stelle m, beispielsweise gelten $f^{(0)}(m) = f(m)$, $f^{(1)}(m) = f'(m)$, $f^{(2)}(m) = f''(m)$ etc.

Definition 6.1 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine am Punkt $m \in \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbare Funktion, dann heißt

$$T_m f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(m) \cdot \frac{(x-m)^k}{k!}$$

die *Taylorreihe der Funktion f am Entwicklungspunkt m.*

Beispiel 6.3 Um die Taylorreihe von $f(x) := e^x$ am Entwicklungspunkt $m = 0$ zu berechnen, benötigen wir zunächst alle Ableitungen an diesem Punkt.

$$\begin{array}{lllll} f(x) = e^x, & f'(x) = e^x, & f''(x) = e^x, & f^{(3)}(x) = e^x, & \dots \\ f(0) = \underbrace{e^0 = 1}_{s.Abschnitt 2.5}, & f'(0) = 1, & f''(0) = 1, & f^{(3)}(0) = 1, & \dots \end{array}$$

Entsprechend ergibt sich die Taylorreihe wie folgt:

$$\begin{array}{rcl} T_0 f(x) & := & \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0) \cdot \frac{(x-0)^k}{k!} \\ & = & \sum_{i=0}^{\infty} 1 \cdot \frac{(x)^k}{k!} \qquad = \quad 1 + \frac{(x)^1}{1!} + \frac{(x)^2}{2!} + \frac{(x)^3}{3!} + \cdots \end{array}$$

6.2.2 Eigenschaften der Taylorreihe

Die Taylorreihe muss nicht für jeden Wert von x konvergieren. Wenn die Taylorreihe jedoch in einem Intervall konvergiert, so ist sie auf dem Intervall identisch mit der Ausgangsfunktion:

Satz 1 Sei $g(x) := \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!}$ die Taylorreihe von f am Entwicklungspunkt $m = 0$. Falls $g(x)$ für alle x in einem Intervall $[-a, a]$ um die 0 konvergiert, gilt:

$$g(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in (-a, a).$$

Diese Eigenschaft der Taylorreihe $T_0 f$ rührt daher, dass die Taylorreihe am Punkt Null die selben Ableitungswerte besitzt wie f. Wir verdeutlichen dies mit einem Blick auf den Baustein: $\frac{x^k}{k!}$.

Der Baustein $\frac{x^k}{k!}$

Der Baustein $\frac{x^k}{k!}$, ein normiertes Monom, hat für $k \neq 0$ zwei bemerkenswerte Eigenschaften:
1) Zum einen hat der k-te Baustein als Ableitung stets den $(k-1)$-ten Baustein, hier einmal am Beispiel demonstriert:

$$\left(\frac{x^4}{4!}\right)' = \left(\frac{\cancel{4} \cdot x^2}{\cancel{4} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}\right) = \left(\frac{x^3}{3!}\right) \qquad \left(\frac{x^3}{3!}\right)' = \left(\frac{\cancel{3} \cdot x^2}{\cancel{3} \cdot 2 \cdot 1}\right) = \left(\frac{x^2}{2!}\right) \qquad \dots$$

2) Zum anderen ergibt sich für fast alle Bausteine der Wert 0, wenn man $x = 0$ setzt, mit Ausnahme von $\frac{x^0}{0!} = 1$.

Ableitung Ableitung Ableitung

Baustein	$\frac{x^0}{0!}$	$\frac{x^1}{1!}$	$\frac{x^2}{2!}$	$\frac{x^3}{3!}$	...
Wert bei $x = 0$	1	0	0	0	...

Mit diesen Eigenschaften ergibt sich die folgende Eigenschaft der Taylorreihe:

Korollar 2 Sei $g(x) := \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}$ die Taylorreihe am Entwicklungspunkt $m = 0$. Falls $g(x)$ für alle x in einem Intervall $[-a, a]$ um die 0 konvergiert, gilt:

$$g^{(k)}(0) = f^{(k)}(0) \quad \text{für alle } k = 0, 1, 2, 3 \dots$$

Mit anderen Worten: Die Funktion g hat an der Stelle $x = 0$ die selben Ableitungen wie f. Dies wird deutlich, wenn man die Ableitungen der Taylorreihe $g(x)$ berechnet und $x = 0$ einsetzt.
Die folgende Tabelle verdeutlicht, wie die beiden zentralen Eigenschaften der $\frac{x^k}{k!}$-Bausteine die Ableitung der Taylorreihe bestimmen:

Die Ableitungen der Taylorreihe

$$\begin{array}{lllllll}
g(x) & = \underline{f(0)\cdot 1} & +f'(0)\cdot\frac{x^1}{1!} & +f''(0)\cdot\frac{x^2}{2!} & +f'''(0)\cdot\frac{x^3}{3!} & + \cdots \\
 & & & & \text{Ableitung} & \\
g'(x) & = f(0)\cdot 0 & +\underline{f'(0)\cdot 1} & +f''(0)\cdot\frac{x^1}{1!} & +f'''(0)\cdot\frac{x^2}{2!} & + \cdots \\
 & & & & \text{Ableitung} & \\
g''(x) & = f(0)\cdot 0 & +f'(0)\cdot 0 & +\underline{f''(0)\cdot 1} & +f'''(0)\cdot\frac{x^1}{1!} & + \cdots \\
\vdots & & & & \ddots &
\end{array}$$

Einsetzen des Entwicklungspunktes $x = 0$

$$\begin{array}{lllllll}
g(0) & = \underline{f(0)\cdot 1} & +f'(0)\cdot 0 & +f''(0)\cdot 0 & +f'''(0)\cdot 0 & + \cdots \\
g'(0) & = f(0)\cdot 0 & +\underline{f'(0)\cdot 1} & +f''(0)\cdot 0 & +f'''(0)\cdot 0 & + \cdots \\
g''(0) & = f(0)\cdot 0 & +f'(0)\cdot 0 & +\underline{f''(0)\cdot 1} & +f'''(0)\cdot 0 & + \cdots \\
\vdots & & & & \ddots &
\end{array}$$

6.3 Das Taylorpolynom als Approximation einer Funktion

6.3.1 Die allgemeine Form des Taylorpolynoms:

Definition 6.2 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine am Punkt $m \in \mathbb{R}$ n-mal differenzierbare Funktion, dann heißt

$$\begin{aligned} T_m^n f(x) &:= \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(m) \cdot \frac{(x-m)^k}{k!} \\ &= f(m) + f^{(1)}(m)\frac{(x-m)^1}{1!} + f^{(2)}(m)\frac{(x-m)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(m)\frac{(x-m)^n}{n!} \end{aligned}$$

das *Taylorpolynom vom Grad n der Funktion f am Entwicklungspunkt m.*

Das Taylorpolynom vom Grad n ist eine "endliche Version" der Taylorreihe. Dies hat den entscheidenden Vorteil, dass das Taylorpolynom –als endliche Summe– für alle Werte von x einen endlichen Wert ergibt.

Die Taylor*reihe* ist -auf dem Konvergenzintervall- identisch mit der ursprünglichen Funktion (s. Satz 1). Im Gegensatz dazu ist das Taylor*polynom* allerdings "nur noch" eine Approximation der ursprünglichen Funktion. Je höher der Grad des Taylorpolynoms, um so besser stimmt das Taylorpolynom rund um den Entwicklungspunkt mit der gegebenen Funktion überein. Dies sieht man zum Beispiel in Abbildung 6.1, dort werden die ersten vier Taylorpolynome der Eulerfunktion e^x mit der Funktion selbst verglichen.

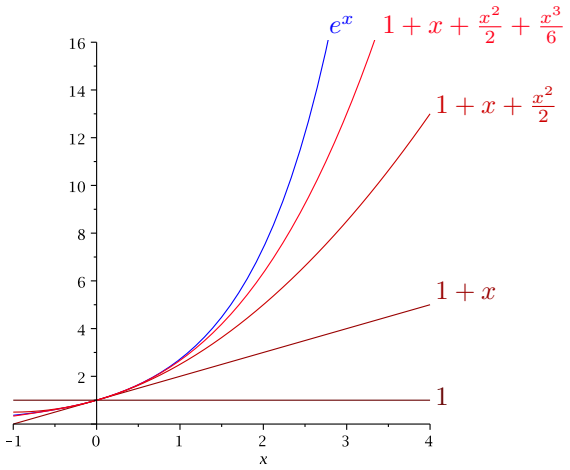

Abbildung 6.1: Die ersten vier Taylorpolynome der Eulerfunktion e^x.

Beispiel 6.4 (Anwendungsbeispiel) Will man den Wert der Eulerzahl e näherungsweise berechnen, so kann man das Taylorpolynom der Funktion e^x an der Stelle $m = 0$ entwickeln und den wert $x = 1$ einsetzen. Wir tun dies mittels des Taylorpolynoms vom Grad 3:

$$\begin{aligned} T_0^3 f(x) &= 1 + \tfrac{x^1}{1!} + \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^3}{3!} \\ &= 1 + x + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{6} \\ T_0^3 f(1) &= 1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{8}{3} = 2,\overline{6} \end{aligned}$$

6.3.2 Restgliedabschätzung

Wie genau ist die Approximation von e aus Beispiel 6.4? Die Eulerzahl hat ungefähr den Wert $2,71828$, den Fehler zum berechneten Wert $2,\overline{6}$ kann man jedoch auch ohne dies zu wissen mit dem Satz von Taylor abschätzen:

Satz 3 (Satz von Taylor) *Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei auf dem abgeschlossenen Intervall $[0, \bar{x}]$ n-mal stetig differenzierbar und die Ableitung $f^{(n+1)}(x)$ sei auf dem offenen Intervall $(0, \bar{x})$ definiert.*

Dann gibt es eine Zahl $\xi \in (0, \bar{x})$ so dass gilt:

$$f(\bar{x}) = \underbrace{f(0) + f^{(1)}(0)\frac{\bar{x}^1}{1!} + f^{(2)}(0)\frac{\bar{x}^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{\bar{x}^n}{n!}}_{\text{das Taylorpolynom vom Grad } n} \underbrace{+ f^{(n+1)}(\xi)\frac{\bar{x}^n}{n!}}_{\text{Fehlerterm}} \tag{6.1}$$

Definition 6.3 Der Term $f^{(n+1)}(\xi)\frac{\bar{x}^n}{n!}$ in Gleichung (6.1) heißt *Lagrangesches Restglied*[1].

Wenn man die Größe des Lagrangeschen abschätzen kann, so kann man über das Umstellen der Gleichung (6.1) den Fehler abschätzen, den man macht, wenn man statt $f(\bar{x})$ den Wert des Taylorpolynoms $T_0^n(\bar{x})$ berechnet:

Beispiel 6.5 (Fortsetzung Anwendungsbeispiel 6.4) In Beispiel 6.4 wird der Wert der Eulerzahl e näherungsweise berechnet:

$$T_0^3 f(1) = 1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{8}{3} = 2,\overline{6}$$

Nach Satz 6.1 gibt es nun ein $\xi \in (0, 1)$ so dass gilt:

$$f(1) - T_0^3 f(1) = f^{(4)}(\xi)\frac{1}{4!} = \frac{e^\xi}{4!}$$

Mit dem zusätzlichen Wissen, dass $e \leq 3$ gilt, und dass $e^\xi \leq 1$ gilt folgt:

$$f(1) - T_0^3 f(1) = \frac{e^\xi}{4!} \leq \frac{3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{8}$$

Mit dieser Rechnung können wir zeigen, dass der errechnete Wert $2,\overline{6}$ höchstens um $1/8 = 0,125$ kleiner ist als die Eulerzahl e.
Dies ist natürlich nur eine obere Schranke mit gehöriger "Sicherheitsreserve", der tatsächliche Fehler ist deutlich kleiner. Zum Vergleich: Der tatsächliche Fehler liegt etwa bei $2,71828 - 2,\overline{6} \sim 0.051615161$.

[1] Es gibt noch weitere mögliche Formen für das Restglied, die hier nicht erwähnt werden.

6.4 Aufgaben

Nähern Sie den Wert von $\sqrt{2}$ an.

1. Berechnen Sie dazu zunächst das Taylorpolynom vom Grad 3 an der Stelle $m = 0$ für die Funktion $f(x) := \sqrt{x+1}$, unter Verwendung der folgenden Ableitungen:

$$\begin{array}{lllllll} f(x) & = & \sqrt{x+1} & f(0) & = & \sqrt{1} & = 1 \\ f'(x) & = & \frac{1}{2\sqrt{x+1}} & f'(0) & = & \frac{1}{2\sqrt{1}} & = \frac{1}{2} \\ f''(x) & = & -\frac{1}{4\sqrt{(x+1)^3}} & f''(0) & = & -\frac{1}{4\sqrt{1}} & = -\frac{1}{4} \\ f'''(x) & = & \frac{3}{8\sqrt{(x+1)^5}} & f'''(0) & = & \frac{3}{8\sqrt{1}} & = \frac{3}{8} \end{array}$$

2. Setzen Sie in das Taylorpolynom von Taylorpolynom den Wert $\bar{x} = 1$ ein.

3. Schätzen Sie den gemachten Fehler, in dem Sie den Betrag(!) des Lagrangeschen Restglieds abschätzen. Verwenden Sie hierzu die Ableitung

   $f^{(4)}(\xi) = -\frac{15}{16\sqrt{(\xi+1)^7}}$

   Zusammen mit der Eigenschaft, dass für alle $\xi \in (0,1)$ gilt: $\frac{1}{\sqrt{(\xi+1)^7}} \leq 1$.