Relativistische Astrophysik

J. Schmitt

Vorlesung WS 2009/2010

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

Version: 1. Oktober 2009

1.1 Was ist “Relativistische Astrophysik”?

Wir wollen unter “Relativistische Astrophysik” die Anwendung der allgemeinen Relativitätstheorie (ART) auf die Astrophysik verstehen. Wichtige Schritte in der Historie der ART und ihrer Anwendungen in der Astrophysik sind:

1915	Einstein veröffentlich die allgemeine Relativitätstheorie
1929	Entdeckung der Expansion des Universums durch E. Hubble
1963	Entdeckung des kosmischen Mikrowellenhintergrunds (CMB) ⇒ Hot Big Bang
1967	Entdeckung des “Crab Pulsars” (Neutronensterne)
1993	Nobelpreis für binary pulsar
ca. 2000	Schwarzes Loch im Zentrum der Milchstraße

Die klassischen, von A. Einstein vorgeschlagenen, Tests der ART sind:

1. Periheldrehung des Merkurs (43” pro Jahrhundert)
2. Verschiebung von Sternpositionen bei einer Sonnenfinsternis (“lensing”)
3. Gravitationsrotverschiebung von Licht

Diese drei Tests, da im Sonnensystem durchgeführt, stellen kleine relativistische Korrekturen zur klassischen Physik dar. Für die relativistische Astrophysik hingegen sind solche Objekte interessant, in denen die relativistischen Effekte “groß“ sind:

⇒ Pulsare, Neutronensterne, Schwarze Löcher

⇒ Big Bang

⇒ Gravitationsstrahlung (in Newton’scher Theorie nicht vorgesehen!)

Wo treten allgemein relativistische Effekte auf?

1. Sonnensystem (→ Korrekturen zur Newton’schen Theorie)
2. Kompakte Objekte: Weiße Zwerge (WDs), Neutronensterne (NS), Schwarze Löcher (BH)
3. “Gravitational lensing”

4. Gravitationsstrahlung
5. Kosmologie, (wird in dieser Vorlesung nicht behandelt)

1.2 Schwarzschildradius - “klassisch”

Eine (nicht ganz korrekte) Herleitung des Schwarzschildradius ergibt sich wie folgt:
Man betrachte die Fluchtgeschwindigkeit $\mathrm{v}_{\mathrm{esc}}$ eines Teilchens mit der Masse m im Schwerefeld eines Körpers der Masse M im Abstand r:

$$\frac{GMm}{r} = \frac{1}{2} m \mathrm{v}_{\mathrm{esc}}^2 \tag{1.1}$$

oder

$$\mathrm{v}_{\mathrm{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}. \tag{1.2}$$

Natürlich ist $\mathrm{v}_{\mathrm{esc}}$ durch die Lichtgeschwindigkeit nach oben begrenzt. Für jede Masse M existiert daher ein Grenzradius r_s, bei dem $\mathrm{v}_{\mathrm{esc}}$ die Lichtgeschwindigkeit erreicht:

$$r_s = 2\frac{GM}{c^2}. \tag{1.3}$$

Dieser Radius ist der Schwarzschildradius; er bleibt auch allgemein relativistisch unverändert, wie später gezeigt werden wird. Nichtrelativistische Objekte sind stets viel gößer als ihr jeweiliger Schwarzschildradius.

	M (g)	r_s (cm)	r_{actual} (cm)
Elektron	$9{,}1 \cdot 10^{-28}$	$1{,}35 \cdot 10^{-55}$	$3 \cdot 10^{-13}$
Mensch	10^5	$1{,}5 \cdot 10^{-23}$	$2 \cdot 10^2$
Erde	$6 \cdot 10^{27}$	1	$6{,}4 \cdot 10^8$
Sonne	$2 \cdot 10^{33}$	$3 \cdot 10^5$	$7 \cdot 10^{10}$
Neutronenstern	$2 \cdot 10^{33}$	$3 \cdot 10^5$	10^6
Galaktischer Kern	$2 \cdot 10^{43}$	$3 \cdot 10^{15}$	?

1.3 Verbindung: Schwarzes Loch - Quantenmechanik

Im folgenden stellen wir einige empirische Beziehungen zwischen der Quantenmechanik und Schwarzen Löchern her:
Die Heisenberg’sche Unschärfe-Relation besagt, dass

$$\Delta x \Delta p \simeq \hbar \tag{1.4}$$

gilt. Mit

$$\Delta x = 2R_S \tag{1.5}$$

und der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung

$$\Delta p = \frac{\Delta E}{c} \tag{1.6}$$

erhalten wir dann

$$\Delta E = \frac{\hbar c}{\Delta x} = \frac{\hbar\, c\, c^2}{2 \cdot 2GM} = \frac{\hbar c^3}{4\,GM} \stackrel{!}{=} kT \tag{1.7}$$

d.h.

$$T = \frac{\hbar c^3}{4kGM} \simeq 10^{-7} \frac{M_0}{M} \tag{1.8}$$

Die Oberfläche der Schwarzschildkugel ist

$$A = 4\pi R_S^2 = 4\pi \left(\frac{2GM}{c^2}\right)^2 = \frac{16\pi G^2 M^2}{c^4} \tag{1.9}$$

Aus der Thermodynamik wissen wir, dass

$$dE = TdS \tag{1.10}$$

gilt (E Energie, T Temperatur, S Entropie). Berechnen wir nun mit

$$dA = \frac{32\pi G^2}{c^4} MdM \tag{1.11}$$

die Relation

$$dE = d\left(Mc^2\right) = c^2 dM = \frac{c^4 dA}{32\pi G^2 M} c^2 = \frac{c^6}{32\pi G^2 M} dA = \frac{\hbar c^3}{2\pi 4kGM} dS \tag{1.12}$$

erhalten wir die Identifikation

$$S = \frac{c^3 k}{4G\hbar} A \tag{1.13}$$

zwischen Entropie und Fläche.
Die Schwarzkörperstrahlung ist

$$L = A\sigma T^4 \tag{1.14}$$

mit $\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3}$, also ist

$$L = \frac{16\pi G^2 M^2}{c^4} \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} \frac{\hbar^4 c^{12}}{(8\pi)4k^4 G^4 M^4} = \frac{c^6 \hbar}{M^2 G^2} \frac{4\pi^{13}}{15 \cdot 8^4 \pi^4} \tag{1.15}$$

$$L = \frac{c^6 \hbar}{G^2 M^2} \frac{1}{30 \cdot 8^3 \pi} \tag{1.16}$$

Die Abklingzeit (“Zerstrahlzeit”) ist damit

$$\tau = \frac{E}{L} = \frac{Mc^2}{c^6 \hbar} \pi 30 \cdot 8^3 \tag{1.17}$$

$$\tau = M^3 \frac{G^2}{c^4 \hbar} 30\pi 8^3 \simeq 10^{10} \left(\frac{M}{10^{15}\mathrm{g}}\right) \mathrm{yr} \tag{1.18}$$

Für astrophysikalisch “interessante” Schwarze Löcher mit Massen von einigen Sonnen ist damit die sog. “Hawking-Strahlung” irrelevant. Bis heute gibt es keinerlei experimentelle Verifikation der “Hawking-Strahlung”.

1.4 Wie viele kompakte Objekte gibt es in der Milchstraße?

“Klassische” kompakte Objekte entstehen als Endprodukte der Sternentwicklung; der Entstehungsprozeß von Schwarzen Löchern in galaktischen Kernen ist z. Zt. unklar. Im Folgenden wollen wir überlegen, wie viele kompakte Objekte (“Sternleichen”) es in der Milchstraße gibt. Sei $\phi(M_V)$ die Leuchtkraftfunktion, d.h. die Anzahl der Sterne pro pc^3 und Magnitude in der Milchstraße und $\phi_{MS}(\log(M))$ die Massenfunktion von Hauptreihensternen, d.h. die Anzahl der Sterne pro pc^3 und $\log(M)$. Dann gilt

$$\phi_{MS}(\log(M)) = \phi(M_V) \cdot \left|\frac{dM_V}{d\log(M)}\right| \cdot 2 \overbrace{H(M_V)}^{\text{Skalenhöhe}} \cdot \underbrace{f_{MS}(M_V)}_{\text{Bruchteil der Hauptreihensterne}} \tag{1.19}$$

Sei außerdem

$$\chi(\log(M)) \tag{1.20}$$

die gesamte Anzahl von Sternen (pro Massenintervall), die je in der Milchstraße entstanden sind. Dann ist mit dem Alter der Milchstraße von $t_0 \simeq 13$ Milliarden Jahren und der Annahme einer konstanten Geburtenrate

$$\phi_{MS}(\log(M)) = \chi(\log(M)) \frac{T_{MS}}{t_0} \tag{1.21}$$

Der Anteil der "low-mass stars" ist (wegen $T_{MS} \sim t_0$)

$$\phi_{MS}(\log(M)) = \chi(\log(M)) \tag{1.22}$$

Für "high-mass stars" ist allerdings $\frac{T_{MS}}{t_0} < 1$. Wir können abschätzen, dass

$$T_{MS} = \frac{\Delta x_{MS} M E^*}{L}, \tag{1.23}$$

wobei Δx_{MS} der Bruchteil des Wasserstoffs, der in Helium umgewandelt wird ist (ca. 0,13). Die freigesetzte Energie pro g ist $E^* = 0{,}007c^2 \simeq 6{,}4 \cdot 10^{18} \frac{\text{erg}}{\text{g}}$. Außerdem gilt die bekannte Relation

$$L \sim M^{3,5} \tag{1.24}$$

d.h. $T_{MS} \sim \frac{M}{M^{3,5}} = 13 \cdot 10^9 \left(\frac{M}{M_0}\right)^{-2,5}$ yr. Als Ergebnis erhalten wir schließlich

$$\chi(\log(M)) = D_0 M^{D_1} \tag{1.25}$$

mit verschiedenen Parametern D_0, D_1 in Abhängigkeit vom betrachteten Massenbereich

Massenbereich	D_0	D_1
$0{,}1 \leq M \leq 1$	33	$-0{,}5$
$1 \leq M \leq 10$	35	$-1{,}5$
$M \geq 11$	163	$-1{,}9$

Die Anzahldichte ist

Massenbereich	n
$1 - 4M_0$	$2{,}5 \cdot 10^{-2}$ pc^{-3}
$4 - 10M_0 \leq 10$	$2{,}2 \cdot 10^{-2}$ pc^{-3}
$M \geq 11$	$1{,}0 \cdot 10^{-2}$ pc^{-3}

und die Massenbilanz ist:

Hauptreihensterne:	$3{,}8 \cdot 10^{-2}$	M_0pc^{-3}
Gas:	$4{,}5 \cdot 10^{-2}$	M_0pc^{-3}
Weisse Zwerge:	$5 \cdot 10^{-3}$	M_0pc^{-3}
	0,088	M_0pc^{-3}
Oort Limit	0,140	M_0pc^{-3}

Kapitel 2

Newton'sche und allgemein-relativistische Gravitation

Version: 1.Oktober 2009

2.1 Newton'sche Gravitation

Wir betrachten eine punktförmige Masse M, die eine Kraft auf eine Testmasse m im Abstand $\vec{r}$ ausübt ($\vec{e}_r$: Einheitsvektor in Richtung $\vec{r}$):

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\vec{e}_r \tag{2.1}$$

Dies kann man interpretieren als Kraftfeld, das durch ein Skalarfeld beschrieben wird. Das skalare Gravitationspotential ist in diesem Fall

$$\phi = -\frac{GM}{r} \qquad \text{mit} \qquad \vec{F} = -m\nabla\phi \tag{2.2}$$

Für ein Ensemble von Teilchen M_j an den Orten $\vec{r}_j$ ist das Potential:

$$\phi(\vec{r}) = -G\sum_j \frac{M_j}{|\vec{r}-\vec{r}_j|} = -G\sum_j \frac{\rho(\vec{r}_j)d^3r_j}{|\vec{r}-\vec{r}_j|} = -G\int \frac{\rho(\vec{r}\,')d^3r'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \tag{2.3}$$

und das Gravitationspotential ϕ gehorcht folgender Differentialgleichung (DGL):

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho \tag{2.4}$$

Dies kann man mit Hilfe des Gaußchen Satzes zeigen:

$$\int \nabla\cdot\vec{A}\,dV = \oint \vec{A}\cdot\vec{n}\,dS \tag{2.5}$$

Man definiere $f := \frac{1}{r}$, sowie $\vec{A} := \nabla f$ und setze ein:

$$\int \Delta f\,dV = \oint \nabla f\cdot\vec{n}\,dS = 4\pi\oint r^2\left(-\frac{1}{r^2}\right)dS = -4\pi \tag{2.6}$$

$$\Rightarrow \Delta f = -4\pi\delta(\vec{r}) \tag{2.7}$$

Nun führe man die obige Rechnung mit der Integralform des Gravitationspotentials ϕ in Gleichung 2.3 durch:

$$\Delta\phi = -G\int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d^3r' = -G\int \rho(\vec{r}\,')\Delta\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)d^3r' = G\int \rho(\vec{r}\,')4\pi\Delta\left(\vec{r}-\vec{r}\,'\right)d^3r' \tag{2.8}$$

$$\Leftrightarrow \Delta\phi = 4\pi G\rho(\vec{r}) \tag{2.9}$$

Gleichung 2.9 ist als Poissongleichung bekannt.Die Newton'sche Gravitation wird durch ein Skalarfeld $\varphi(\vec{r})$ beschrieben, welche durch die Spezifikation der Dichte $\rho(\vec{r})$ an jedem Ort berechnet werden kann.
Die Probleme der Newton'schen Theorie können wir an dem obigen Ausdruck erkennen:

1. Es handelt sich um eine instantane, bis ins Unendliche wirkende Wechselwirkung.

2. Sie ist inkonsistent mit der speziellen Relativitätstheorie.

2.2 Ziel der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART)

Das Ziel der ART ist die relativistische Verallgemeinerung der Newton'schen Gravitation. Die gesuchte Verallgemeinerung weist starke Analogien zum Übergang der Elektrostatik zur Elektrodynamik auf.
In der Elektrostatik gilt:

$$\Delta\phi_{el} = 4\pi\rho_{el} \tag{2.10}$$

mit zeitunabhängingen Grössen ϕ_{el} und ρ_{el}. Wäre nun $\phi_{el} = \phi_{el}(\vec{r},\, t)$ und $\rho_{el} = \rho_{el}(\vec{r},\, t)$ hätten wir hier eine instantane Fernwechselwirkungstheorie, wie im Falle der Newton'schen Gravitation. Dies wird in der Elektrodynamik durch die Ersetzung

$$\Delta \to \Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \tag{2.11}$$

vermieden. In bewegten Inertialsystemen führen Ladungsdichten zu Stromdichten, so dass man für die Quellen des Feldes den "Viererstrom"

$$\rho_{el} \to (\rho_{el},\, \rho_{el} v^j) = j^\alpha \tag{2.12}$$

und das "Viererpotential"

$$\phi_{el} \to A^\alpha \tag{2.13}$$

einführt. Es gilt dann:

$$\Delta\Phi_{el} = -4\pi\rho_{el} \to \Box A^\alpha = \frac{4\pi}{c} j^\alpha \tag{2.14}$$

Man beachte die Ähnlichkeit zwischen der Gleichung 2.14 und der Poissongleichung 2.9. Allerdings benötigt man in der Elektrodynamik ein 4-Potential, also einen Vektor, der aber nicht eindeutig bestimmt ist (Eichtransformation).

2.2.1 Wie behandelt die ART Gravitation?

Der Übergang $\Delta \to \Box$ wird auch in der ART analog vollzogen. In der Elektrodynamik ist die Ladung q unabhängig von der Geschwindigkeit, dies gilt aber nicht für die Masse.
Die Ladungsdichte $\rho_{el} = \frac{\Delta q}{\Delta V}$ transformiert sich wie die 0-Komponente eines Vierervektors. Die Massendichte $\rho = \frac{\Delta M}{\Delta V}$ allerdings transformiert sich wie die 00-Komponente eines Lorentztensors.

$$\rho \to \begin{pmatrix} \rho c^2 & \rho c v^i \\ \rho c v^i & \rho c v^i v^j \end{pmatrix} = T^{\mu\nu} \tag{2.15}$$

Dies ist der "Energie-Impuls-Tensor". Analog wird das Gravitationspotential ϕ verallgemeinert zum sog. "metrischen Tensor" $g^{\mu\nu}$, für den

$$\Box g^{\mu\nu} \sim G T^{\mu\nu} \tag{2.16}$$

gilt, wobei G die Kopplungskonstante ist. Die wesentlichen Punkte der zu bestimmenden Gravitationstheorie sind daher:

1. Die ART ist eine relativistische Verallgemeinerung der Newton'schen Gravitationstheorie mit Analogien zur Elektrodynamik.

2. Da sich die Massendichte wie die 00-Komponente eines Tensors transformiert, erhält man in der ART tensorielle Feldgleichungen im Gegensatz zu den vektoriellen in der Elektrodynamik.

3. Die Energie des Gravitationsfeldes stellt eine Feldquelle dar, aus der nichtlineare Feldgleichungen folgen.

2.3 Wiederholung der speziellen Relativitätstheorie (SRT)

2.3.1 Grundannahmen und Lorentzformalismus

Ein Raumzeitereignis wird durch die Koordinaten

$$x^\alpha = (ct, x^1, x^2, x^3) \tag{2.17}$$

beschrieben, also durch einen sogenannten "kontravarianten Vektor", siehe Abschnitt 2.3.2, (als c werde die Lichtgeschwindigkeit notiert). Im Raumzeitkontinuum wird durch den metrische Tensor Abstandsmessung möglich, der in diesem Fall gegeben ist:

$$\eta_{\alpha\beta} = diag(+1, -1, -1, -1) \quad \text{“=”} \quad \eta^{\alpha\beta}. \tag{2.18}$$

Wir betrachten nun die Differenz zweier Ereignisse:

$$dx^\alpha = x^\alpha - y^\alpha. \tag{2.19}$$

Der "Abstand" ds^2 von dx^α ist definiert durch

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{2.20}$$

In Gleichung 2.20 wurde die sogenannte Einsteinsche Summenkonvention verwendet, die besagt, daß über gleiche hoch- und tiefgestellte Indizes zu summieren ist. Für Lichtstrahlen gilt damit $ds^2 = 0$. Erlaubte Intertialsystems in der SRT sind solche, die sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit relativ zueinander bewegen. Des weiteren ist die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsysteme vom gleichen Betrage der Größe c. Wir betrachten daher lineare Koordinatentransformationen der Form:

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta \tag{2.21}$$

Unter Lorentztransformationen ist das Wegelement ds^2 invariant und man findet für einen Beobachter, der sich entlang der x-Achse bewegt

$$ct' = \gamma(ct - \beta x^1) \tag{2.22}$$

$$x^{1'} = \gamma(x^1 - \beta ct) \tag{2.23}$$

$$x^{2'} = x^2 \tag{2.24}$$

$$x^{3'} = x^3 \tag{2.25}$$

oder

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.26}$$

Die inverse Transformation ist gegeben durch

$$\hat{\lambda} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

Die Grösse

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{2.28}$$

ist (offensichtlich) Lorentzinvariant. $d\tau$ ist die Eigenzeit, d.h. die Koordinatenzeit, die ein ruhender Beobachter misst.

2.3.2 Kovariante und kontravariante Vektoren

In der SRT ist der Unterschied zwischen kovarianten und kontravarianten Vektoren "klein" und besteht "nur" durch ein Vorzeichen. In der ART ist es wichtig, genau zwischen kovarianten und kontravarianten Größen zu unterscheiden. Betrachten wir eine kontinuierlich Funktion

$$y = y(x^1, x^2, \ldots, x^N) \tag{2.29}$$

der Argumente $x^1 \ldots x^N$. Das Differential dieser Funktion bezüglich Änderungen dx^i ist

$$dy = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial y}{\partial x^i} dx^i = \vec{g}\vec{d} \tag{2.30}$$

mit dem kovarianten Vektor

$$\vec{g} = \left(\frac{\partial y}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial y}{\partial x^N} \right) \tag{2.31}$$

und dem kontravarianten Vektor

$$\vec{d} = \left(dx^1, \ldots, dx^N \right) \tag{2.32}$$

Die Vektoren $\vec{d}$ und $\vec{g}$ haben unterschiedliche Eigenschaften bzgl. Koordinatentransformationen. Wir betrachten dazu ein neuen Koordinatensystem $X^1, \ldots, X^N$. Die neuen Koordinaten können als Funktion der alten dargestellt werden

$$X^i = F^i(x^1, \ldots, x^N). \tag{2.33}$$

und (unter der Annahme, dass eine inverse Transformation existiert!) gilt dies natürlich auch umgekehrt:

$$x^i = \tilde{F}^i(X^1, \ldots, X^N) \tag{2.34}$$

Wir berechnen nun die Änderungen in den neuen Koordinaten x^i bezüglich Änderungen in x^k und finden

$$dX^i = \sum_j \frac{\partial F^i}{\partial x^j} dx^j \tag{2.35}$$

Sei $\vec{D} = (dX^1, \ldots, dX^N)$, dann ist

$$D^k = dX^k = \sum_j \frac{\partial F^k}{\partial x^j} dx^j \tag{2.36}$$

d.h. der Übergang von dx^j nach dX^k wird durch die Koeffizienten $\frac{\partial F^k}{\partial x^j}$ vermittelt.
Nun gilt wegen der Invertierbarkeit:

$$x^j = \tilde{F}^j(X^1, \ldots, X^N) \tag{2.37}$$

und somit

$$dx^j = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \tilde{F}^j}{\partial X^i} dX^i \tag{2.38}$$

Damit erhält man:

$$dy = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial y}{\partial x^j} dx^j = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial y}{\partial x^j} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \tilde{F}^j}{\partial X^i} dX^i = \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial y}{\partial x^j} \frac{\partial \tilde{F}^j}{\partial X^i} \right) dX^i = \sum_{i=1}^{N} G_i D^i \tag{2.39}$$

Hier ist der Ausdruck in der grossen Klammer der Gradient von y bzgl. der neuen Koordinaten.
Die Grösse

$$G_i = \sum_i \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial \tilde{F}^j}{\partial X^i} = \sum_i g_i \frac{\partial \tilde{F}^j}{\partial X^i} \tag{2.40}$$

ist kovariant, wohingegen die Größe

$$D^k = \sum_j \frac{\partial F^k}{\partial x^j} d^j \tag{2.41}$$

kontravariant ist.
Wir fassen damit zusammen: Kontravariante Vektoren enthalten die partiellen Ableitungen der "neuen" Koordinaten bzgl. der "alten" Koordinaten. Kovariante Vektoren enthalten partielle Ableitungen der "alten" Koordinaten bzgl. der "neuen" Koordinaten. Bei linearen Koordinatentransformationen sind die Transformationen zwischen kovarianten und kontravarianten Vektoren raumzeitunabhängig.

Definition: Tensor
Es gibt verschiedene Definitionen des Begriffs Tensor. Für unsere Zwecke definieren wir einen kontravarianten Tensor der Stufe r, geschrieben

$$T^{n_1,\ldots,n_r} \tag{2.42}$$

als eine Grösse, die sich bzgl. jedes einzelnen Index wie ein kontravarianter Vektor transformiert:

$$T'^{\,n_1,\ldots,n_r} = \Lambda^{n_1}_{\mu_1} \ldots \Lambda^{n_r}_{\mu_r} T^{\mu_1\ldots\mu_r}. \tag{2.43}$$

Analog definiert man einen kovarianten Tensor ($T_{n_1 n_2}$) und gemischte Tensoren ($T^{n_1}_{n_2}$).

Beispiel eines Tensors aus der klassischen Mechanik: Trägheitstensor $\underline{\underline{I}}$
Für ein System von Massenpunkten m_i an den Orten $\vec{r}_i$ ist der Trägheitstensor wie folgt definiert:

$$\underline{\underline{I}} = \sum_i m_i (r_i^2 \cdot \mathrm{id} - \vec{r}_i \times \vec{r}_j). \tag{2.44}$$

Es sind z.B. die Komponenten

$$I_{xx} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - x_i x_i) = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) \tag{2.45}$$

und

$$I_{xy} = -\sum_i m_i x_i y_i \tag{2.46}$$

Der Drehimpuls L ist damit:

$$\vec{L} = \underline{\underline{I}}\, \vec{\omega} \tag{2.47}$$

In der ART ist der Trägheitstensor einer Massenverteilung bzw. dessen zeitliche Veränderung für die Erzeugung von Gravitationswellen wichtig.

2.3.3 Relativistische Mechanik

Wir definieren die Vierergeschwindigkeit als

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}. \tag{2.48}$$

Die Komponenten von u^α in einem lokalen Inertialsystem (IS) seien

$$u^0 = c \tag{2.49}$$

$$u^1 = u^2 = u^3 = 0 \tag{2.50}$$

und erhält $u^\mu u_\mu = c^2$ als lorentzinvariante Größe. In einem dazu relativ bewegtem System K' ist

$$u'^0 = \gamma u^0 \tag{2.51}$$

$$u'^1 = -\gamma\beta u^0 = -\gamma\left(-\frac{dx^1}{dt}\right)\frac{1}{c}c = \gamma\frac{dx^1}{dt} \tag{2.52}$$

$$u'^2 = u'^3 = 0. \tag{2.53}$$

Definieren wir den Viererimpuls als

$$P^\alpha = mu^\alpha \tag{2.54}$$

mit

$$P^\alpha P_\alpha = m^2c^2, \tag{2.55}$$

so können wir in dem folgenden Ausdruck

$$cp'^0 = cmu'^0 = cm\gamma u^0 = cm\gamma c = mc^2\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = mc^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)+\dots = mc^2+\frac{1}{2}mv^2+\dots \tag{2.56}$$

den ersten Term (mc^2) als Ruheenergie erkennen und den zweiten Term ($\frac{1}{2}mv^2$) als die (klassische) kinetische Energie. Die Energie ist somit proportional zur Null-Komponente des Vierer-Impulses

$$cp^0 = E \tag{2.57}$$

und wir schreiben alternativ die auch für Photonen geltende Relation:

$$p^\alpha = (E/c, \vec{p}) \tag{2.58}$$

$$p^\alpha p_\alpha = m^2c^2 = \frac{E^2}{c^2} \tag{2.59}$$

Die Viererbeschleunigung definieren wir als

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau}. \tag{2.60}$$

a^μ und u^μ sind orthogonal, wie folgende Rechnung zeigt:

$$a^\mu u_\mu = \frac{du^\mu}{d\tau}u_\mu = \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\left(u^\mu u_\mu\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}c^2 = 0 \tag{2.61}$$

Wir können schließlich noch die Viererkraft definieren:

$$F^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau}. \tag{2.62}$$

2.3.4 Elektrodynamik

Die homogenen Maxwell-Gleichungen (MG) sind gegeben durch

$$\nabla \vec{B} = 0, \tag{2.63}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{2.64}$$

und die inhomogenen Maxwell-Gleichungen durch

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{2.65}$$

$$\nabla \vec{E} = 4\pi\rho_{el}. \tag{2.66}$$

Der Viererstrom ist definiert durch

$$j^{\alpha} = \left(c\rho_{el}, \vec{j}\right). \tag{2.67}$$

und die Kontinuitätsgleichung besagt:

$$\nabla\vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}\rho_{el} = 0 \qquad \rightarrow \qquad j^{\alpha}{}_{,\alpha} = 0 \tag{2.68}$$

Die Vektoren $\vec{B}$ und $\vec{E}$ sind 3-Vektoren, die NICHT durch entsprechende Verallgemeinerungen in 4-Vektoren überführt werden können. Für eine relativistische Beschreibung der Maxwell-Gleichungen führt man daher den elektromagnetischen Feldtensor ein.
Definieren wir den elektromagnetischen Feldtensor als

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{2.69}$$

ein. Damit können wir die homogene MG schreiben als

$$\partial_{\alpha}F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c}j^{\beta} \tag{2.70}$$

und die inhomogene MG ist:

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\partial_{\beta}F_{\gamma\delta} = 0, \quad \forall\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}. \tag{2.71}$$

Für die Darstellung des Feldtensors können wir auch

$$F^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha}A^{\beta} - \delta^{\beta}A^{\alpha} \tag{2.72}$$

mit dem Vektorpotential A^{β} schreiben. In der Lorentzeichung ($\partial_{\alpha}A^{\alpha} = 0$) gilt dann:

$$\Box A^{\alpha} = \eta^{\gamma\epsilon}\partial_{\gamma}\partial_{\epsilon}A^{\alpha} = \frac{4\pi}{c}j^{\alpha} \tag{2.73}$$

2.3.5 Relativistische Hydrodynamik

Für die ART benötigen wir die Gleichungen der relativistischen Hydrodynamik.
Wir beginnen mit den Gleichungen der nichtrelativistischen Hydrodynamik. Dies ist zum einen die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{v}) = 0 \tag{2.74}$$

und die Eulergleichung

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\nabla)\,\vec{v}\right)=-\nabla p+\vec{f}. \tag{2.75}$$

In Gleichung 2.74 und 2.75 bezeichnen ρ, p und $\vec{v}$ Dichte, Druck und 3-Geschwindigkeit; $\vec{f}$ stellt eine zusätzliche, nicht hydrodynamische Kraft dar. Im folgenden sollen die 2.74 und 2.75 in Tensorform geschrieben werden. Dann führen wir die Größe $M^{\alpha\beta}=\rho v^{\alpha}v^{\beta}$ ein.
Die Grösse $M^{\alpha\beta}=\rho v^{\alpha}v^{\beta}$ ist ein Tensor, weil

$$\rho=\frac{\Delta M}{\Delta V}=\frac{\text{Ruhemasse}}{\text{Eigenvolumen}} \tag{2.76}$$

ist.
Im Ruhesystem ist

$$M^{00}=\rho c^2\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \tag{2.77}$$

in einem bewegten System dagegen ist

$$M^{00}=\rho c^2\gamma^2\begin{pmatrix}1&\frac{v}{c}\\\frac{v}{c}&\left(\frac{v}{c}\right)^2\end{pmatrix} \tag{2.78}$$

Man könnte auch schreiben:

$$\tilde{\rho}=\gamma^2\rho=\frac{M^{00}}{c^2} \tag{2.79}$$

Die Divergenz von $M^{\alpha\beta}$ ist:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}M^{0\beta}=\partial_{\beta}M^{0\beta}=c\partial_t\tilde{\rho}+c\partial_k\tilde{\rho}v^k \tag{2.80}$$

Man berechnet zuerst:

$$\partial_{\beta}M^{i\beta}=\partial_tM^{i0}+\partial_kM^{ik}=\partial_t\left(\tilde{\rho}v^i\right)+\partial_k\left(\tilde{\rho}v^iv^k\right)=\tilde{\rho}\underbrace{\left(\partial_tv^i+\partial_kv^iv^k\right)}_{=0}+\underbrace{\left(\partial_t\tilde{\rho}+\partial_k\tilde{\rho}v^q\right)}_{=0}v^i \tag{2.81}$$

Im kraftfreien Fall ist:

$$\partial_{\beta}M^{\alpha\beta}=M^{\alpha\beta}{}_{,\beta}=0 \tag{2.82}$$

Bei Berücksichtigung des Druckes ist

$$P^{\alpha\beta}=P\left(\frac{v^{\alpha}v^{\beta}}{c^2}-\eta^{\alpha\beta}\right) \tag{2.83}$$

und in einem mitbewegten System ist wegen $v^{\alpha}=\mathrm{diag}(c,0,0,0)$:

$$P^{\alpha\beta}=\mathrm{diag}(0,P,P,P) \tag{2.84}$$

Der Energie-Impuls-Tensor ist definiert durch

$$T^{\alpha\beta}=M^{\alpha\beta}+P^{\alpha\beta}=\left(\rho+\frac{P}{c^2}\right)v^{\alpha}v^{\beta}-\eta^{\alpha\beta}P \tag{2.85}$$

wobei im kraftfreien Fall

$$\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}F^{\alpha\beta}=\partial_{\beta}T^{\alpha\beta}=T^{\alpha\beta}{}_{,\beta}=0 \tag{2.86}$$

gilt, d.h. der Energie-Impuls-Tensor ist divergenzfrei. Ansonsten gilt:

$$T^{\alpha\beta}{}_{,\beta}=f^{\alpha} \tag{2.87}$$

2.4 Äquivalenzprinzip

Im Zentrum der Einstein'schen ART steht das von A. Einstein bereits im Jahr 1907 formulierte Äquivalenzprinzip. Das Äquivalenzprinzip tritt genau betrachtet bereits in der klassischen Mechanik auf. Wir betrachten die Kraft, die auf eine Masse m_g in einem äußeren Gravitationsfeld wirkt. Sie ist gegeben durch

$$\vec{F}_g = -m_g \nabla\phi \tag{2.88}$$

wobei wir unter m_g die sogenannte "schwere" Masse verstehen wollen. Nach dem zweiten Newton'schen Gesetz ist die Beschleunigung proportional zur trägen Masse m_i, d.h.,

$$\vec{F} = m_i \vec{a} \tag{2.89}$$

wenn $\vec{a}$ die Beschleunigung bezeichnet. Wir schreiben diesen Zusammenhang als

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = -m_g \nabla\phi \tag{2.90}$$

$$\ddot{\vec{r}}_i = -\underbrace{\frac{m_g}{m_i}}_{\stackrel{!}{=}1} \nabla\phi = +\vec{g} \tag{2.91}$$

mit der Annahme, dass $m_g = m_i$ gelten soll. Wie Einstein gezeigt hat, ist diese "selbstverständliche" Annahme keineswegs selbstverständlich, vielmehr ist die Annahme der Gleichheit zwischen schwerer und träger Masse bereits eine der möglichen Ausdrucksformen des sog. Äquivalenzprinzips. Wir formulieren das Äquivalenzprinzip als die Behauptung, daß es in einem beliebigen Gravitationsfeld an jedem Punkt der Raumzeit möglich ist, ein lokales kartesisches Koordinatensystem zu finden, so daß in einer hinreichend kleinen Umgebung um den gewählten Raumzeitpunkt die Naturgesetze die gleiche Form annehmen wie in einem unbeschleunigten kartesischen Koordinatensystem ohne Gravitation. Mit anderen Worten, wir können somit die Gravitation lokal "weg-transformieren", d.h., die Wirkung von Beschleunigung und Gravitation ist identisch; dies ist offensichtlich nur möglich, wenn träge und schwere Masse gleich sind.
Betrachte ein stationäres, konstantes Gravitationsfeld ($\vec{g}$ =konst.). Wir können mit Hilfe der folgenden Transformation in ein anderes Koordinatensystem transformieren:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \frac{1}{2}\vec{g}t^2, \quad t' = t \tag{2.92}$$

In dem gestrichenen Koordinatensystem verschwindet die zweite Ableitung von $\vec{r}'$:

$$\ddot{\vec{r}}' = \ddot{\vec{r}} - \vec{g} = 0 \tag{2.93}$$

d.h. in diesem System tritt keine Beschleunigung auf.
Das Äquivalenzprinzip bedingt zwei wichtige Konsequenzen, die Gravitationsrotverschiebung und die Lichtablenkung im Gravitationsfeld, die wir im folgenden betrachten werden.

2.4.1 Äquivalenzprinzip und Gravitationsrotverschiebung

Wir betrachten eine Quelle B und einen Empfänger A in einem konstanten Gravitationsfeld; Quelle B und Empfänger A seien an Orten verschiedenen Gravitationspotentials. Die Quelle B emittiere Photonen mit einer genau definierten Energie, die vom Empfänger A nachgewiesen werden. Wegen des Äquivalenzprinzips kann das Gravitationsfeld durch ein beschleunigtes Bezugssystem ersetzt werden; wir betrachten in diesem System von B nach A gehende Strahlen: BILD

$$S_A = h + \frac{1}{2}gt^2 \tag{2.94}$$

$$S_B = \frac{1}{2}gt^2 \tag{2.95}$$

Die Laufzeit $\bar{t}$ von Strahl 1 ist

$$c\bar{t} = h + \frac{1}{2}g\bar{t}^2 \tag{2.96}$$

$$g\frac{1}{2}\bar{t}^2 - c\bar{t} + h = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{t} = \frac{c - \sqrt{c^2 - 2gh}}{g} = \frac{c}{g}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2gh}{c^2}}\right) = \frac{c}{g}\left(1 - \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right)^{1/2}\right) \tag{2.97}$$

und für Strahl 2:

$$c\left(\bar{t} + \Delta t_A - \Delta t_B\right) = h + \frac{1}{2}g\left(\bar{t} + \Delta t_A\right)^2 - \frac{1}{2}g\Delta t_B^2 = h + \frac{1}{2}g\bar{t}^2 + g\bar{t}\Delta t_A + \frac{g}{2}\left(\Delta t_A^2 - \Delta t_B^2\right) \tag{2.98}$$

Benutzen wir nun die Bedingung für Strahl 1

$$c\left(\Delta t_A - \Delta t_B\right) = g\bar{t}\Delta t_A + \underbrace{\frac{g}{2}\left(\Delta t_A^2\Delta - t_B^2\right)}_{\text{vernachlässigbar!}} \tag{2.99}$$

so erhalten wir:

$$c\Delta t_A - g\bar{t}\Delta t_A = c\Delta t_B \tag{2.100}$$

$$\Delta t_A = \frac{\Delta t_B}{1 - g\bar{t}/c} \tag{2.101}$$

Hier setzen wir das Ergebniss für (Entwicklung der Wurzelfunktion)

$$\bar{t} \simeq \frac{c}{g}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2}\frac{2gh}{c^2}\right)\right) = \frac{h}{c} \tag{2.102}$$

ein:

$$\Delta t_A = \frac{\Delta t_B}{1 - \frac{gh}{c^2}} = \frac{\Delta t_B}{1 - \frac{\phi}{c^2}} \tag{2.103}$$

Die Konsequenzen dieser Überlegungen und damit die Konsequenzen des Äquivalenzprinzips sind:

1. Die "Uhr" des Beobachters A geht langsamer!
2. Da $\Delta t = \frac{1}{\nu_A} = \frac{\lambda_A}{c}$ ist, gilt $\lambda_A = \frac{\lambda_B}{1 - \phi/c^2}$ und die Wellenlängen der bei A registrierten Photonen sind größer (Gravitationsrotverschiebung)

Wäre die Raumzeit als flach angenommen und würde sie durch eine Minkowski-Metrik beschrieben werden, hätten A und B immer den gleichen Abstand! Offensichtlich kann die Raumzeit für beschleunigte Beobachter nicht durch einen euklidischen Raum beschrieben werden; in der Tat wird in der ART die Raumzeit als "gekrümmt" beschrieben.

2.4.2 Äquivalenzprinzip und Lichtablenkung im Gravitationsfeld

Im Gravatiationsfeld tritt nicht nur eine Energieänderung der Photonen auf, sondern auch eine Ablenkung, d.h., die Lichtstrahlen bewegen sich auf gekrümmten Bahnen; wir werden später sehen, daß dies sog. Nullgeodäten der i.A. gekrümmten Raumzeit sein werden. Wir betrachten einen Lichtstrahl, der sich senkrecht zur Richtung des Gravitationsfelds bewegt, und ersetzen nun wieder das Gravitationsfeld durch einen beschleunigten Beobachter. Wir untersuchen, wie der zur Zeit $t = 0$ emittierte Lichtstrahl von entlang der y-Achse freifallenden Beobachtern registriert wird. Für jeden Beobachter gilt:

$$h(t) = h_0 - \frac{1}{2}gt^2 \tag{2.104}$$

Die Ankunftszeit des Photons im Abstand x ist $t = \frac{x}{c}$. Es gilt:

$$h(x) = h_0 - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{c^2} \tag{2.105}$$

$$h'(x) = -\frac{gx}{c^2} = \tan\alpha \simeq \alpha \tag{2.106}$$

und daher ist

$$d\alpha = dx\left(-\frac{g}{c^2}\right) = dx\left(-\frac{GM}{x^2c^2}\right) \tag{2.107}$$

für eine Punktmasse M.
Die gesamte Ablenkung beim Vorübergang ist

$$2 \cdot \alpha = -2\int_{R_0}^{\infty} \frac{GM}{c^2x^2}dx = 2 \cdot \frac{GM}{R_0c^2} \tag{2.108}$$

weil Ein- und Ausfallswinkel gleich sind.
Wie im weiteren Verlauf abgeleitet wird, ist der korrekte Wert aus der ART allerdings doppelt so groß:

$$\alpha_{tot} = 4 \cdot \frac{GM}{R_0c^2} \tag{2.109}$$

2.5 Uhrengang und Gravitationsrotverschiebung

Im folgenden soll der Gang von Uhren im Gravitationsfeld und bei Eigenbewegung genauer untersucht werden.

2.5.1 Eigenzeit

Die Eigenzeit eines Beobachters ist immer durch eine, in seinem System ruhende Uhr gegeben. Das Wegelement $ds_{\text{Uhr}} = cd\tau$ bestimmt die Anzeige einer Uhr. Es gilt:

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \frac{1}{c}\sqrt{g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu}, \tag{2.110}$$

wobei die Größe $g_{\mu\nu}$ den metrischen Tensor am Raumzeitort der Uhr bezeichnet. Im Allgemeinen wird der Gang der Uhr beeinflußt durch:

1. Gravitationsfeld

2. Bewegung der Uhren

Wir behandeln beide Fälle seperat.

1. Wir betrachten ruhende Uhren im Gravitationsfeld. Für derartige Uhren gilt:

   $$dx^i = 0, \quad dx^0 = cdt \tag{2.111}$$

   und

   $$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}c^2dt^2} = \sqrt{g_{00}}dt \tag{2.112}$$

   Das Gravitationsfeld sei schwach (d.h. fast “flach”) und statisch:

   $$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2} \Rightarrow d\tau = \sqrt{1 + \frac{2\phi}{c^2}}dt \simeq \left(1 + \frac{\phi}{c^2}\right)dt \tag{2.113}$$

2. Nun betrachten wir eine Uhr, die sich mit konstanter Geschwindigkeit in Abwesenheit eines Gravitationsfeldes, bewegt, also eine speziell-relativistische Uhr. Für diesen Fall gilt:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}, \quad dx^i = v^i dt, \quad dx^0 = cdt \tag{2.114}$$

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{\eta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}dt \tag{2.115}$$

und damit erhält man die übliche Zeitdilatation der SRT.

Anwendung: Global Positioning System (GPS)

Wir untersuchen den Gang zweier identischer Uhren, die sich jeweils auf der Erdoberfläche (mit Geschwindigkeit $v = 0$) sowie im Orbit um die Erde in Höhe h befinden; dabei sei ein Kreisbahnorbit angenommen. Bei wiederum kleinen Gravitationsfeldern und kleinen Geschwindigkeiten gilt in erster Ordnung:

$$d\tau = \left(1 + \frac{\phi(r)}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2}\right)dt \tag{2.116}$$

hier bezeichnet $\phi(r)$ das Gravitationspotential und v die Geschwindigkeit des Satelliten. An der Erdoberfläche ist

$$\phi = -\frac{GM}{R_E} \tag{2.117}$$

und im Orbit in Höhe h

$$\phi = -\frac{GM}{R_E + h} = -\frac{GM}{R_E(1+\frac{h}{R_E})} \tag{2.118}$$

$$v^2 = \frac{GM}{R_h} \tag{2.119}$$

$$d\tau = \left(1 - \frac{GM}{c^2 R_E}\right)dt_E \tag{2.120}$$

$$d\tau = \left(1 - \frac{GM}{c^2(R_E+h)} - \frac{GM}{2c^2(R_E+h)}\right)dt_s = \left(1 - \frac{3GM}{2c^2(R_E+h)}\right)dt_s \tag{2.121}$$

$$\frac{dt_s}{dt_e} = \frac{1-\frac{GM}{c^2R_E}}{1-\frac{3GM}{2c^2(R_E+h)}} \tag{2.122}$$

$$= \left(1-\frac{GM}{c^2R_E}\right)\left(1+\frac{3}{2}\frac{GM}{c^2(R_E+h)}\right) \tag{2.123}$$

$$\simeq 1 - \frac{GM}{R_E c^2} + \frac{3GM}{2c^2(R_E+h)} \tag{2.124}$$

$$= 1 - \frac{GM}{R_E c^2}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{1}{1+\frac{h}{R_E}}\right) \tag{2.125}$$

Offensichtlich hängt der Gangunterschied zwischen Satelliten- und Erduhr von der Höhe ab. Es ergibt sich die folgende Interpretation:

$$\begin{aligned} h &= 0, & \tfrac{dt_s}{dt_E} &> 1 \quad \rightarrow \text{ SRT} \\ h &= \infty, & \tfrac{dt_s}{dt_E} &< 1 \quad \rightarrow \text{ ART} \end{aligned}$$

Die beiden Uhren haben den gleichen Gang bei der Höhe:

$$\frac{h}{R_E} = \frac{3}{2}, \quad \text{bzw.} \quad \frac{dt_s}{dt_E} = 1 \tag{2.126}$$

2.5.2 Rotverschiebung

Wir betrachten ein statisches Gravitationsfeld. Identische Quellen seien an den Punkten $\vec{r}_A$ und $\vec{r}_B$:
BILD
Zwischen Eigen- und Koordinatenzeiten gelten die Beziehungen:

$$d\tau_A = \sqrt{g_{00}(r_A)}\, dt_A \tag{2.127}$$

$$d\tau_B = \sqrt{g_{00}(r_B)}\, dt_B \tag{2.128}$$

Wir identifizieren $d\tau_A$ und $d\tau_B$ mit der Periode der elektromagnetischen Schwingungen, die ausgesandt bzw. empfangen werden. Da sich der Weg von A nach B nicht ändert, benötigen alle Photonen die gleiche Zeit, um von A nach B zu gelangen, wir setzen daher $dt_A = dt_B$. Mit

$$\nu_A = \frac{1}{d\tau_A} \quad \text{und} \quad \nu_B = \frac{1}{d\tau_B} \tag{2.129}$$

$$\Rightarrow \frac{\nu_A}{\nu_B} = \frac{d\tau_B}{d\tau_A} = \left(\frac{g_{00}(r_B)}{g_{00}(r_A)}\right)^{1/2} \tag{2.130}$$

Definiert man die Rotverschiebung z als

$$z = \frac{\nu_A}{\nu_B} - 1 = \frac{\lambda_B}{\lambda_A} - 1 \tag{2.131}$$

so ergibt sich:

$$z = \left(\frac{g_{00}(r_B)}{g_{00}(r_A)}\right)^{1/2} - 1 \tag{2.132}$$

Für schwache Felder ist

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2} \tag{2.133}$$

$$z = \left(\frac{1 + \frac{2}{c^2}\phi(r_B)}{1 + \frac{2}{c^2}\phi(r_A)}\right)^{1/2} - 1 \tag{2.134}$$

$$\simeq \left(\left(1 + \frac{2}{c^2}\phi(r_B)\right)\left(1 + \frac{2}{c^2}\phi(r_A)\right)\right)^{1/2} - 1 \tag{2.135}$$

$$\simeq \left(1 + \frac{2}{c^2}\Big(\phi(r_B) - \phi(r_A)\Big)\right)^{1/2} - 1 \tag{2.136}$$

$$\simeq 1 + \frac{\phi(r_B) - \phi(r_A)}{c^2} - 1 \tag{2.137}$$

$$= \frac{\phi(r_B) - \phi(r_A)}{c^2} \tag{2.138}$$

Beispiel: Sonne Erde

$$z = \frac{-\frac{GM}{R_s+d} + \frac{GM}{R_s}}{c^2} \simeq \frac{GM}{R_s c^2} \sim 2 \cdot 10^{-6} \tag{2.139}$$

Äquivalente Geschwindigkeit v:

$$v = c \cdot 2 \cdot 10^{-6} \to v \sim 0,6 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \tag{2.140}$$