Zum Zwillingsparadoxon in der Speziellen Relativitätstheorie

von Mike Bernhardt, mikebernhardt@web.de

März 2005

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Ein Effekt der Speziellen Relativitätstheorie ist die Zeitdilatation: **Bewegte Uhren gehen langsamer**[1]. Ein Astronaut, der nach einer langen Weltraumreise in einem entsprechend schnellen Raumschiff zur Erde zurückkehrt, stellt fest, dass im Raumschiff weniger Zeit vergangen ist als auf der Erde, und dass er sogar jünger als sein eigener, auf der Erde gebliebener, Zwillingsbruder ist. Dieses Szenario wird zu einem vermeintlichen Paradoxon – dem sogenannten Zwillings- oder Uhrenparadoxon –, wenn man einwendet, dass Bewegungen relativ sind, und vom Raumschiff aus gesehen die Erde in Bewegung ist, somit also, aus Sicht des Astronauten, sein Zwillingsbruder auf der Erde langsamer altern sollte.

Man kann diesem Einwand entgegenhalten[2], dass die beiden Zwillinge keine gleichwertigen Beobachter sind, da der Astronaut auf seiner Reise mehrmals beschleunigt und abgebremst wird – was sich für ihn unmittelbar durch Trägheitskräfte bemerkbar macht –, und sich daher eindeutig von seinem auf der Erde gebliebenen Bruder unterscheidet.

Einige Autoren[3] gehen in ihrer Argumentation allerdings einen Schritt weiter und sagen, dass wegen dieser Beschleunigungen die Spezielle Relativitätstheorie gar nicht angewendet werden dürfe, da es sich nicht mehr um Inertialsysteme handele, und dass stattdessen zur Erklärung des Zwillingsparadoxons die Allgemeine Relativitätstheorie herangezogen werden müsse. Dieses Argument kann aber ad absurdum geführt werden, wenn man das Zwillingsparadoxon so abwandelt, dass keine Beschleunigungen mehr vorkommen. Auch in dieser Situation kommt es zum erwähnten Paradoxon. Zu dessen Auflösung kann nun nicht mehr auf Beschleunigungen oder gar die Unzulänglichkeit der Speziellen Relativitätstheorie verwiesen werden. Die Erklärung muss in der Speziellen Relativitätstheorie liegen!

Im Folgenden wird dieses modifizierte Zwillingsparadoxon vorgestellt, und der scheinbare Widerspruch aufgelöst, indem die Situation aus Sicht aller beteiligten Bezugssysteme durchgerechnet wird. Um der Asymmetrie der beiden Zwillinge Rechnung zu tragen, werden nicht zwei, sondern drei Bezugssysteme eingeführt: Die Erde und zwei Raumschiffe mit gleich großer aber entgegengesetzter Geschwindigkeit. Das Ergebnis ist in allen drei Rechnungen gleich: **Der Zwilling auf der Erde altert am schnellsten**. Darüber sind sich alle Beobachter einig, und das Zwillingsparadoxon ist somit keineswegs paradox.

[1] Der Gang zweier Uhren, die sich relativ zueinander mit der Geschwindigkeit v bewegen, unterscheidet sich um den Faktor $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$. Ein Beobachter, der relativ zu einer der beiden Uhren ruht, stellt fest, dass ein von der bewegten Uhr gemessenes Zeitintervall $\Delta t'$ auf seiner ruhenden Uhr die Dauer $\Delta t = \gamma \Delta t'$ hat. Da γ immer größer oder gleich 1 ist, gilt: $\Delta t \geq \Delta t'$.

[2] Siehe z.B. Sexl [1] und Freund [2].

[3] Siehe z.B. Greiner [3] und Tipler [4].

Das Zwillingsparadoxon ohne Beschleunigungen

Wir betrachten die drei Bezugssysteme S, S' und S''. Relativ zum System S bewege sich S' mit der Geschwindigkeit v und S'' mit der gleich großen, aber entgegengesetzten Geschwindigkeit $u = -v$. Es treten keine Beschleunigungen auf; bezüglich S bewegen sich S' und S'' gleichförmig und geradlinig und sollen während des Experiments ihre Geschwindigkeiten nicht ändern. Wir haben es also mit drei Inertialsystemen zu tun.

Im System S ruhe die Uhr U, in S' die Uhr U' und in S'' die Uhr U''. Abbildung 1 zeigt die Anordnung

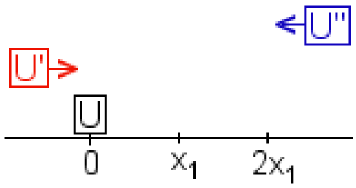

Abbildung 1: Die Uhren U, U' und U''

der drei Uhren aus Sicht von S: U' und U'' liegen symmetrisch um den Punkt x_1, und U ruhe im Ursprung von S. Im Verlauf unseres Gedankenexperiments begegnen sich jeweils zwei Uhren[4] (siehe Abbildung 2–4). Das Treffen der Uhren U und U' bezeichnen wir als Ereignis E_0 und ordnen ihm bezüglich S, S' und

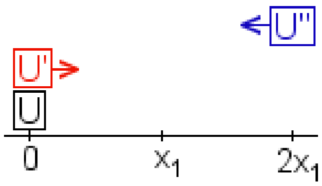

Abbildung 2: E_0

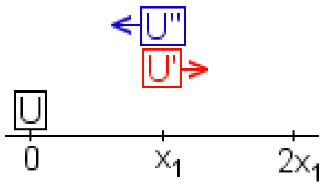

Abbildung 3: E_1

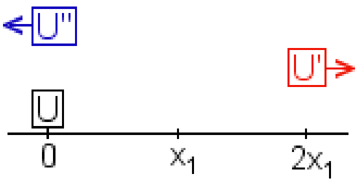

Abbildung 4: E_2

S'' die Raumzeitkoordinaten (x_0, t_0), (x'_0, t'_0) bzw. (x''_0, t''_0) zu. Das Treffen von U' mit U'' nennen wir E_1 mit den Koordinaten (x_1, t_1), (x'_1, t'_1) bzw. (x''_1, t''_1), und das Treffen von U mit U'', das Ereignis E_2, habe die Koordinaten (x_2, t_2), (x'_2, t'_2) bzw. (x''_2, t''_2).

In Anlehnung an das eigentliche Zwillingsparadoxon möge man sich unter dem System S die Erde und unter S' bzw. S'' ein fortfliegendes bzw. zurückkommendes Raumschiff vorstellen, worin einer der Zwillinge den Weltraum bereist, indem er vom System S auf das vorbeifliegende System S' aufspringt, darin eine gewisse Strecke zurücklegt, beim Rendezvous mit System S'' in dieses überwechselt, und damit schließlich wieder zur Erde zurückkehrt. Bei diesen Wechseln der Bezugssysteme ist der Reisende allerdings Beschleunigungen ausgesetzt, und dies hat einen Einfluss auf den Gang seiner Uhr[5]! Wir können diesen beschleunigungsbedingten Zeitdilatationseffekt jedoch umgehen, indem wir nicht mit dem Zeitintervall rechnen, das auf der vom Astronauten mitgeführten Uhr angezeigt wird, sondern stattdessen mit der Summe der beiden Zeitintervalle, die auf den Raumschiffuhren U' und U'' vergehen, während sich der Astronaut in S' bzw. S'' aufhält.

Wir interessieren uns also für die Zeitintervalle Δt, $\Delta t'$ und $\Delta t''$. Dabei ist Δt die Zeit, die auf der Uhr U zwischen den Ereignissen E_0 und E_2 vergeht, $\Delta t'$ die Zeit, die auf U' zwischen E_0 und E_1 vergeht und $\Delta t''$ die Zeit, die auf U'' zwischen E_1 und E_2 vergeht. Mit den oben eingeführten Koordinaten können diese Zeitintervalle wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned} U: \quad & \Delta t = t_2 - t_0 \\ U': \quad & \Delta t' = t'_1 - t'_0 \\ U'': \quad & \Delta t'' = t''_2 - t''_1 \end{aligned} \tag{1}$$

[4]Die Bewegungszustände der Uhren mögen bei diesen Begegnungen nicht geändert werden; die Uhren fliegen ungehindert aneinander vorbei.

[5]Eine sehr anschauliche Herleitung der Zeitdilatation bei beschleunigter Bewegung findet sich in Freund [2]. Das Ergebnis sei hier zitiert: Bei konstanter Eigenbeschleunigung α hat ein mit der beschleunigten Uhr gemessenes Eigenzeitintervall $\Delta t'$ im Laborsystem die Dauer $\Delta t = \frac{c}{\alpha} \sinh\left(\frac{\alpha \Delta t'}{c}\right)$.

Wir werden nun untersuchen, wie sich die Situation für einen in S ruhenden Beobachter darstellt, also welche Zeiten er den Uhren U' und U'' zuweist und in welcher Relation diese Zeitintervalle mit seiner eigenen Uhr stehen. Danach versetzen wir uns in die Lage von Beobachtern, die in S' bzw. S'' ruhen, und führen die gleichen Rechnungen nocheinmal aus deren Sicht durch, um am Ende alle drei Ergebnisse miteinander zu vergleichen.

Aus der Sicht von System S

Wir werden zunächst die Raumzeitkoordinaten der drei betrachteten Ereignisse bezüglich S ermitteln und daraus dann mit Hilfe der Lorentz-Transformation die Zeitintervalle aus Gleichung (1) berechnen.

Damit die Lorentz-Transformationsgleichungen die gewohnte Form annehmen, ist noch zu verlangen, dass die Raumzeit-Ursprünge aller drei Systeme zusammenfallen[6]. Wir können das Ereignis E_0 als gemeinsamen Ursprung der drei Systeme wählen:

$$E_0: \quad (x_0, t_0) = (x'_0, t'_0) = (x''_0, t''_0) = (0, 0) \tag{2}$$

Damit sind auch die räumlichen Koordinaten der drei Uhren bezüglich ihrer Ruhesysteme festgelegt: U befindet sich bei $x_0 = x_2 = 0$, U' bei $x'_0 = x'_1 = 0$ und U'' bei $x''_1 = x''_2 \neq 0$.

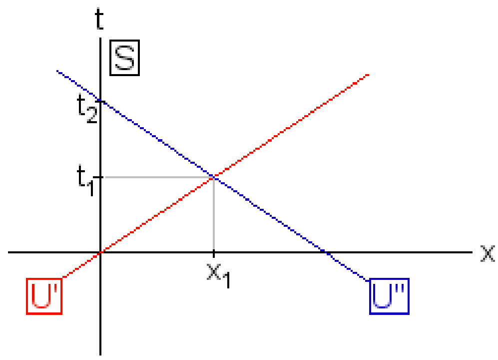

Abbildung 5: Die Bahnen von U' und U'' im System S

Im System S werden die Bahnen von U' und U'' durch folgende Gleichungen beschrieben (siehe Abbildung 5):

$$U': \quad x = vt \tag{3}$$
$$U'': \quad x = -v\,(t - t_2) \tag{4}$$

Die beiden Uhren treffen sich im Punkt (x_1, t_1). Dieser ergibt sich durch Gleichsetzen von (3) und (4). Man erhält:

$$x_1 = \frac{vt_2}{2} \tag{5}$$
$$t_1 = \frac{t_2}{2} \tag{6}$$

Die betrachteten Ereignisse haben also die Koordinaten:

$$\begin{aligned} E_0: &\quad (x_0, t_0) = (0, 0) \\ E_1: &\quad (x_1, t_1) = \left(\frac{vt_2}{2}, \frac{t_2}{2}\right) \\ E_2: &\quad (x_2, t_2) = (0, t_2) \end{aligned} \tag{7}$$

Im System S vergeht also insgesamt die Zeit:

$$\Delta t = t_2 - t_0 = t_2 \tag{8}$$

[6]Dadurch ergibt sich keinerlei Einschränkung. Es ist lediglich eine spezielle Skalierung der Achsen, die unsere Rechnungen vereinfacht.

Mit Hilfe der Lorentz-Transformation können wir die in S' und S'' vergangenen Zeiten aus der in S vergangenen Zeit errechnen. Die Transformationsgleichungen lauten:

$$t' = \gamma\Big(t - \frac{vx}{c^2}\Big) \tag{9}$$
$$t'' = \gamma\Big(t + \frac{vx}{c^2}\Big) \tag{10}$$

Wenn man die Lorentz-Transformation auf die beiden Zeitintervalle der Uhren U' und U'' aus Gleichung (1) anwendet und die Koordinaten (7) einsetzt, erhält man:

$$\begin{aligned}\Delta t' = t_1' - t_0' &= \gamma\Big(t_1 - \frac{vx_1}{c^2} - t_0 + \frac{vx_0}{c^2}\Big)\\ &= \gamma\Big(\frac{t_2}{2} - \frac{v^2}{c^2}\frac{t_2}{2}\Big) = \gamma\Big(1 - \frac{v^2}{c^2}\Big)\frac{t_2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma^2}\frac{t_2}{2} = \frac{t_2}{2\gamma}\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\Delta t'' = t_2'' - t_1'' &= \gamma\Big(t_2 + \frac{vx_2}{c^2} - t_1 - \frac{vx_1}{c^2}\Big)\\ &= \gamma\Big(t_2 - \frac{t_2}{2} - \frac{v^2}{c^2}\frac{t_2}{2}\Big) = \gamma\Big(1 - \frac{v^2}{c^2}\Big)\frac{t_2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma^2}\frac{t_2}{2} = \frac{t_2}{2\gamma}\end{aligned} \tag{12}$$

Die Summe dieser beiden Zeitintervalle beträgt:

$$\Delta t' + \Delta t'' = \frac{t_2}{2\gamma} + \frac{t_2}{2\gamma} = \frac{t_2}{\gamma} = \frac{\Delta t}{\gamma} \tag{13}$$

Und schließlich erhalten wir das Resultat:

$$\Delta t = \gamma\,(\Delta t' + \Delta t'') \tag{14}$$

Ein Beobachter in S kommt also zu dem Ergebnis, dass in seinem Ruhesystem eine größere Zeit vergangen ist, als in den Systemen S' und S'' zusammen.

Aus der Sicht von System S'

Wir ändern nun unsere Perspektive und begeben uns ins System S'. Bezüglich unserer Koordinatenachsen bewegt sich das System S mit der Geschwindigkeit $-v$, und S'' mit $u' = -\frac{2v}{1+(v/c)^2}$. Letzteres gewinnen wir aus der relativistischen Transformationsformel für Geschwindigkeiten[7]. Analog zur ersten Rechnung

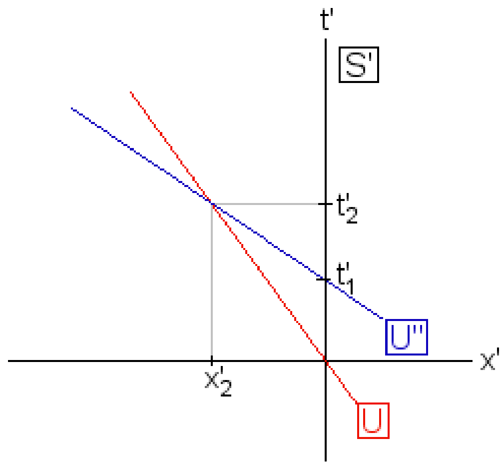

Abbildung 6: Die Bahnen von U und U'' im System S'

[7]Sei S' bezüglich S mit der Geschwindigkeit v bewegt. Eine in S gemessene Geschwindigkeit u hat vom System S' aus gesehen die Geschwindigkeit $u' = \dfrac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}}$. In unserem Fall ist $u = -v$.

ermitteln wir wieder die Koordinaten der drei Ereignisse, jetzt allerdings bezüglich S', und berechnen dann mit Hilfe der Lorentz-Transformation die in S und S'' vergangenen Zeitintervalle.

Im System S' werden die Bahnen von U und U'' durch folgende Gleichungen beschrieben (siehe Abbildung 6):

$$U: \quad x' = -vt' \tag{15}$$

$$U'': \quad x' = u'(t' - t_1') = -\frac{2v}{1+(v/c)^2}(t' - t_1') \tag{16}$$

Die Koordinaten des Schnittpunktes (x_2', t_2') erhalten wir durch Gleichsetzen von (15) und (16):

$$x_2' = -2\gamma^2 v t_1' \tag{17}$$

$$t_2' = 2\gamma^2 t_1' \tag{18}$$

Die betrachteten Ereignisse haben also die Koordinaten:

$$\begin{aligned} E_0: &\quad (x_0', t_0') = (0, 0) \\ E_1: &\quad (x_1', t_1') = (0, t_1') \\ E_2: &\quad (x_2', t_2') = (-2\gamma^2 v t_1',\ 2\gamma^2 t_1') \end{aligned} \tag{19}$$

Im System S' vergeht insgesamt die Zeit:

$$\Delta t' = t_1' - t_0' = t_1' \tag{20}$$

Die Lorentz-Transformationsgleichungen lauten in diesem Falle:

$$t = \gamma\Big(t' + \frac{vx'}{c^2}\Big) \tag{21}$$

$$t'' = \gamma_{u'}\Big(t' - \frac{u'x'}{c^2}\Big) \tag{22}$$

Mit $\gamma_{u'}$ ist gemeint, dass darin u' als Geschwindigkeit eingesetzt werden soll, die Relativgeschwindigkeit zwischen S' und S''. Durch das Minuszeichen in (22) darf man sich nicht verwirren lassen; dieses hebt sich wieder auf, wenn man für u' den längeren Ausdruck mit v einsetzt, welcher ebenfalls negativ ist.

Bevor wir jetzt die in S und S'' vergangenen Zeitintervalle ausrechnen, sollten wir uns kurz klarmachen, dass $\gamma_{u'}$ auch folgendermaßen geschrieben werden kann, was durch simples Einsetzen von u' und ein wenig Rumrechnerei, inklusive Anwendung einer Binomischen Formel, herauskommt:

$$\gamma_{u'} = \gamma^2\Big(1 + \frac{v^2}{c^2}\Big) \tag{23}$$

Damit können wir (22) auch so schreiben:

$$t'' = \gamma^2\bigg(\Big(1 + \frac{v^2}{c^2}\Big)t' + \frac{2vx'}{c^2}\bigg) \tag{24}$$

Das nutzen wir nun aus, um die Zeitintervalle auf den Uhren U und U'' zu berechnen:

$$\begin{aligned} \Delta t = t_2 - t_0 &= \gamma\Big(t_2' + \frac{vx_2'}{c^2} - t_0' - \frac{vx_0'}{c^2}\Big) \\ &= \gamma\Big(2\gamma^2 t_1' - 2\gamma^2 t_1' \frac{v^2}{c^2}\Big) = 2\gamma^3\Big(1 - \frac{v^2}{c^2}\Big)t_1' = 2\frac{\gamma^3}{\gamma^2}t_1' = 2\gamma t_1' \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} \Delta t'' = t_2'' - t_1'' &= \gamma^2\bigg(\Big(1 + \frac{v^2}{c^2}\Big)t_2' + \frac{2vx_2'}{c^2} - \Big(1 + \frac{v^2}{c^2}\Big)t_1' - \frac{2vx_1'}{c^2}\bigg) \\ &= \gamma^2\bigg(\Big(1 + \frac{v^2}{c^2}\Big)2\gamma^2 t_1' - 2\frac{v^2}{c^2}2\gamma^2 t_1' - \Big(1 + \frac{v^2}{c^2}\Big)t_1'\bigg) \\ &= \gamma^2\bigg(\Big(1 + \frac{v^2}{c^2} - 2\frac{v^2}{c^2}\Big)2\gamma^2 - \Big(1 + \frac{v^2}{c^2}\Big)\bigg)t_1' \\ &= \gamma^2\bigg(\Big(1 - \frac{v^2}{c^2}\Big)2\gamma^2 - \Big(1 + \frac{v^2}{c^2}\Big)\bigg)t_1' \\ &= \gamma^2\bigg(\frac{2\gamma^2}{\gamma^2} - \Big(1 + \frac{v^2}{c^2}\Big)\bigg)t_1' = \gamma^2\Big(1 - \frac{v^2}{c^2}\Big)t_1' = t_1' \end{aligned} \tag{26}$$

Wir summieren wieder die in S' und S'' vergangenen Zeiten, also (20) und (26), und vergleichen mit (25):

$$\Delta t' + \Delta t'' = t_1' + t_1' = 2t_1' = \frac{\Delta t}{\gamma} \tag{27}$$

Und erhalten das gleiche Ergebnis wie zuvor:

$$\Delta t = \gamma\,(\Delta t' + \Delta t'') \tag{28}$$

Ein Beobachter in S' kann also das Ergebnis seines Kollegen (oder Zwillings) in S bestätigen: Für den letzteren vergeht mehr Zeit als für S' und S'' zusammen.

Aus der Sicht von System S''

Zum Schluss versetzen wir uns in das System S''. Aufgrund der eingangs verlangten Ursprünge-Koinzidenz sitzen wir mit der Uhr U'' nicht im räumlichen Ursprung von S'', sondern an der Stelle $x_1'' = x_2''$ unserer x''-Achse. Wir beobachten, dass U die Geschwindigkeit $-u = v$, und U' die Geschwindigkeit $v'' = \frac{2v}{1+(v/c)^2}$ hat. Ihre Bahnen werden in S'' durch folgende Gleichungen beschrieben (siehe Abbildung 7):

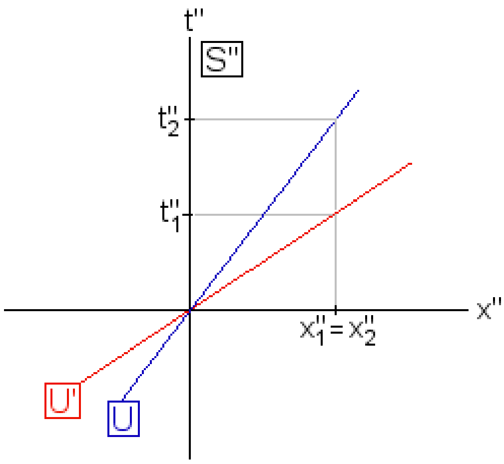

Abbildung 7: Die Bahnen von U und U' im System S''

$$U\colon\quad x'' = vt'' \tag{29}$$

$$U'\colon\quad x'' = v''t'' = \frac{2vt''}{1+(v/c)^2} \tag{30}$$

Daran kann man direkt ablesen:

$$x_2'' = vt_2'' \tag{31}$$

$$x_1'' = \frac{2vt_1''}{1+(v/c)^2} \tag{32}$$

Mit $x_1'' = x_2''$ folgt daraus:

$$t_1'' = \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{t_2''}{2} \tag{33}$$

Die betrachteten Ereignisse haben also die Koordinaten:

$$\begin{aligned}
E_0\colon\quad & (x_0'', t_0'') = (0,0) \\
E_1\colon\quad & (x_1'', t_1'') = \left(vt_2'', \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{t_2''}{2}\right) \\
E_2\colon\quad & (x_2'', t_2'') = (vt_2'', t_2'')
\end{aligned} \tag{34}$$

Im System S'' vergeht insgesamt die Zeit:

$$\begin{aligned}\Delta t'' = t''_2 - t''_1 = t''_2 - \Big(1 + \frac{v^2}{c^2}\Big)\frac{t''_2}{2} \\ = \Big(2 - 1 - \frac{v^2}{c^2}\Big)\frac{t''_2}{2} = \Big(1 - \frac{v^2}{c^2}\Big)\frac{t''_2}{2} = \frac{t''_2}{2\gamma^2}\end{aligned} \tag{35}$$

Die Lorentz-Transformationsgleichungen lauten:

$$t = \gamma\Big(t'' - \frac{vx''}{c^2}\Big) \tag{36}$$

$$t' = \gamma_{v''}\Big(t'' - \frac{v''x''}{c^2}\Big) = \gamma^2\Big((1 + \frac{v^2}{c^2})t'' - \frac{2vx''}{c^2}\Big) \tag{37}$$

Damit berechnen wir die in S und S' vergehenden Zeitintervalle:

$$\begin{aligned}\Delta t = t_2 - t_0 = \gamma\Big(t''_2 - \frac{vx''_2}{c^2} - t''_0 + \frac{vx''_0}{c^2}\Big) \\ = \gamma\Big(t''_2 - \frac{v^2}{c^2}t''_2\Big) = \gamma\Big(1 - \frac{v^2}{c^2}\Big)t''_2 = \frac{t''_2}{\gamma}\end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}\Delta t' = t'_1 - t'_0 = \gamma^2\bigg(\Big(1 + \frac{v^2}{c^2}\Big)t''_1 - \frac{2vx''_1}{c^2} - \Big(1 + \frac{v^2}{c^2}\Big)t''_0 + \frac{2vx''_0}{c^2}\bigg) \\ = \gamma^2\bigg(\Big(1 + \frac{v^2}{c^2}\Big)^2\frac{t''_2}{2} - 2\frac{v^2}{c^2}t''_2\bigg) = \gamma^2\bigg(\Big(1 + \frac{v^2}{c^2}\Big)^2 - 4\frac{v^2}{c^2}\bigg)\frac{t''_2}{2} \\ = \gamma^2\Big(1 + 2\frac{v^2}{c^2} + \frac{v^4}{c^4} - 4\frac{v^2}{c^2}\Big)\frac{t''_2}{2} = \gamma^2\Big(1 - \frac{v^2}{c^2}\Big)^2\frac{t''_2}{2} = \frac{t''_2}{2\gamma^2}\end{aligned} \tag{39}$$

Wir summieren wieder die in S' und S'' vergangenen Zeiten, also (39) und (35), und vergleichen mit (38):

$$\Delta t' + \Delta t'' = \frac{t''_2}{2\gamma^2} + \frac{t''_2}{2\gamma^2} = \frac{t''_2}{\gamma^2} = \frac{\Delta t}{\gamma} \tag{40}$$

Und erhalten erneut die Relation:

$$\Delta t = \gamma\,(\Delta t' + \Delta t'') \tag{41}$$

Auch vom System S'' aus betrachtet vergeht in System S während des Gedankenexperiments mehr Zeit als in S' und S'' zusammen.

Schluss

Anhand dieser drei Rechnungen sollte folgendes deutlich geworden sein:

1. Das Zwillingsparadoxon erscheint nur auf den ersten Blick paradox. Die Relativitätstheorie liefert bei genauerem Hinsehen ein widerspruchfreies Bild der Situation, wie ein Vergleich der drei Ergebnisse (14), (28) und (41) unserer Berechnung zeigt.

2. Zu einem scheinbaren Widerspruch kommt man, wenn der Situation eine Symmetrie auferlegt wird, die sie nicht enthält, nämlich die (symmetrische) Gleichbehandlung beider Zwillinge. Der Umstand, dass der reisende Zwilling auf halber Strecke sein Bezugssystem wechselt, um am Ende wieder bei seinem Bruder auf der Erde anzukommen, macht die beiden Zwillinge unterscheidbar. In einer relativistischen Behandlung des Zwillingsproblems, die diese Asymmetrie berücksichtigt – wie hier durch Einführen eines dritten Bezugssystems geschehen – treten keine Widersprüche auf[8].

3. Das vermeintlich paradoxe an diesem Problem kann im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie aus der Welt geschafft werden, wie oben am modifizierten Zwillingsproblem (ohne Beschleunigungen) vorgerechnet wurde. Es sei nochmals betont, dass wir nicht von der Allgemeinen Relativitätstheorie Gebrauch machen müssen, um die scheinbare logische Inkonsistenz, wie sie das Zwillingsparadoxon bei naiver Betrachtung vermuten lässt, auszuräumen.

4. Betrachtet man einen realen Astronauten, der mit seinem Raumschiff die Erde verlässt und irgendwann wieder zurückkehrt, treten zwangsläufig Beschleunigungen auf. Diese Beschleunigungen verursachen

[8] Eine ähnliche Behandlung des Zwillingsparadoxons, bei der die verschiedenen Blickwinkel durchgerechnet werden, findet sich in Günther [5].

einen zusätzlichen Zeitdilatationseffekt, der – wie beispielsweise bei Freund [2] gezeigt (vergleiche Fußnote 5 auf Seite 2) – ebenfalls mit der Speziellen Relativitätstheorie berechnet werden kann. In dieser realistischeren Betrachtung ist unser Ergebnis noch als Näherung für kleine Beschleunigungen gültig.

Literatur

[1] R. Sexl, H. K. Schmidt, **Raum-Zeit-Relativität**, Vieweg, 2000

[2] J. Freund, **Spezielle Relativitätstheorie für Studienanfänger**, vdf, 2004

[3] W. Greiner, J. Rafelski, **Spezielle Relativitätstheorie**, Verlag Harri Deutsch, 1989

[4] P. A. Tipler, R. A. Llewellyn, **Moderne Physik**, Oldenbourg, 2003

[5] H. Günther, **Starthilfe Relativitätstheorie**, Teubner, 2002